

1.3. Stabilitatea punctului de echilibru

a. Preliminarii

Stabilitatea punctului de echilibru are o semnificație fenomenologic diferită de BIBO-stabilitate.

Fie sistemul dinamic neliniar:

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1.49)$$

x – **starea sistemului**;

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbf{R}_+. \quad (1.50)$$

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ – continuu și lipschitzian .

Problema Cauchy (1.49), (1.50) are soluția unică :

$$x(t) = \{ (t; t_0, x_0), \quad t \geq t_0, \quad (1.51)$$

care este traiectoria în \mathbf{R}^n pt. starea inițială (1.50).

Definiția 5

$x = a = \text{constant}$ se numește **punct de echilibru (PE)** dacă :

$$f(a) = 0. \quad \blacksquare$$

Semnificație fizică : în PE viteza sistemului este nulă : $\dot{x} = \dot{a} = 0$.

Definiția 6

PE $x = a$ se numește **stabil** dacă pt. $\forall v > 0 \exists u > 0$ astfel încât

$$\|x_0 - a\| < u \Rightarrow \|x(t) - a\| < v, \quad t \geq t_0.$$

$x = a$ – **global stabil** dacă este stabil pt. $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$. ■

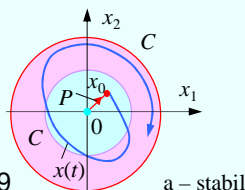


Fig.VII.19

a – stabil

Defini ia 7

PE $x = a$ se nume te **asimptotic stabil** dac este stabil i

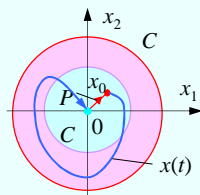
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0.$$

$x = a$ – **global asimptotic stabil** dac este as. st. pt. $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$. ■

Defini ia 8

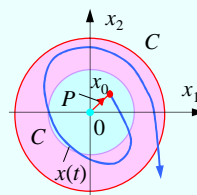
PE $x = a$ se nume te **instabil** dac nu este stabil.

$x = a$ – **global instabil** dac este instabil pt. $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$. ■



b – asimptotic stabil

M. Voicu, IA (VII)



c – instabil

Fig.VII.19

C 14 (33)

3

d. Regula lui Kochenburger

Dac exist oscila ii între inute în vecinatatea PE,

∅ PE nu este global asimptotic stabil.

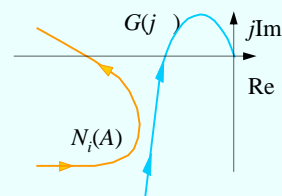
Cu ec. balan ei armonice se extinde criteriul Nyquist.

Dac $G(j\check{S})$ i $N_i(A)$ nu se intersecteaz , adic

$$N(A)G(j\check{S}) + 1 \neq 0, \quad A > 0, \quad \check{S} > 0.$$

Locul $N_i(A)$ – numit **locul critic** –

joac rolul punctului critic $(-1, j0)$.



Regula 5 (Kochenburger)

PE (unic) $U_y = U_v = U_u = 0$ al SAN standard este gl. as. st. dac parcurgând $G(j\check{S})$ pt. \check{S} , locul $N_i(A)$ r mâne la stg. i în afar . ■

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

4

e. Aplica ie:
Sistem automat de pozi ionare

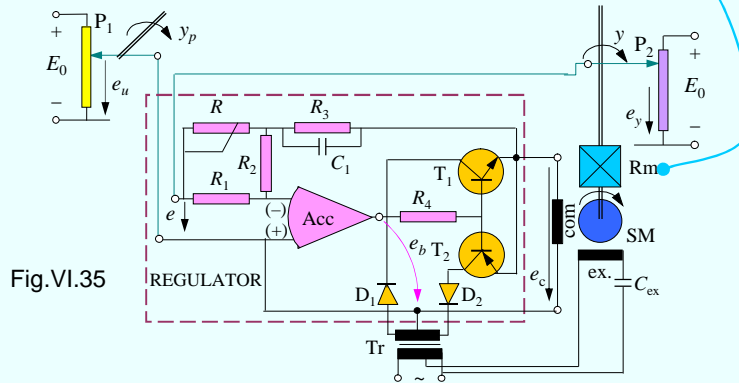
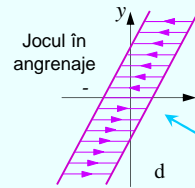


Fig.VI.35

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

5

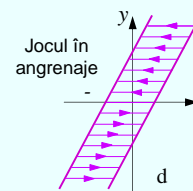
Pt. SA. de poz. de la VI.4.2.b s-a adoptat un reg. PDT₁ care asigur o BIBO-stab. relativ satisf c toare.

Exist nelin. de tip joc în angrenaje (în Rm) care influen eaz negativ stabilitatea.

ω – unghiul axului servomotorului (intrare)

v – semijocul în angrenaje

y – unghiul axului Rm (ie ire)



Componenta I din $G(s)$ (polul $s = 0$) realizeaz :

$$e = 0, e_u = e_y, u = y \quad (\dot{\omega} = 0 - \text{servomotor în repaus}).$$

Zona de echilibru $|U_u| \leq 2v$ este punct de echilibru unic.

Func ia de descriere:

$$N(A) = \frac{k}{f} \left[\frac{f}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2v}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2v}{A} \right) \sqrt{\frac{v}{A} - \frac{v^2}{A^2}} + j4 \left(\frac{v^2}{A^2} - \frac{v}{A} \right) \right], \quad A \geq v.$$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

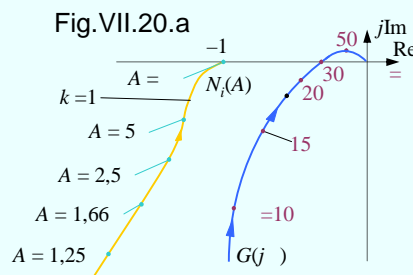
6

Cf. tabelului pentru $k = 1$ se obține fig.VII.20.

A/v	1	1,25	1,66	2,5	5	$+\infty$
$ N(A) /k$	0	0,322	0,576	0,695	0,775	1
$\arg N(A)$	-90°	-38°	-32°	-26°	-15°	0°
$k N_i(A) $	$+\infty$	3,1	1,74	1,44	1,29	1
$\arg N_i(A)$	-90°	-142°	-148°	-154°	-165°	-180°

Locul critic $N_i(A)$
trece prin $-1+j0$.

Cf. regulii 5, PE este
global asimptotic
stabil.



M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

7

Pentru $k = 2$ se obține fig.VII.20.b.

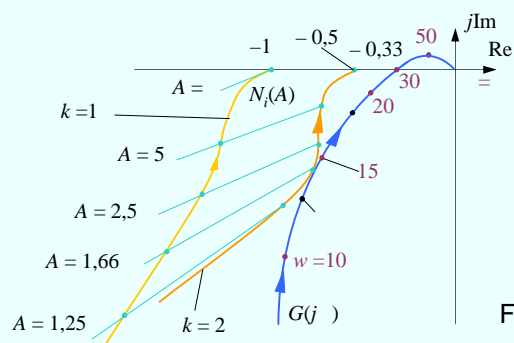


Fig.VII.20.b

Pentru $k > 1$, $N_i(A)$ se deplasează omotetic spre dreapta.

Pentru $k = 2$, $N_i(A)$ și $G(j\omega)$ sunt tangente.

PE este global asimptotic stabil pt. $0 < k < 2$.

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

8

Pentru $k = 3$ se obține fig.VII.20.c.

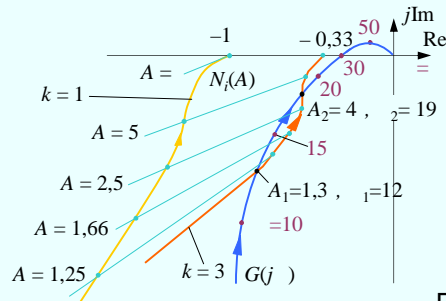


Fig.VII.20.c

Pentru $k \geq 2$ există oscilații între inute.

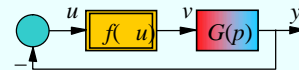
Pentru $k = 3$:

$$Uu(t) = 1,3v \sin 12t, \quad \text{instabil ;}$$

$$Uu(t) = 4v \sin 19t, \quad \text{stabil .}$$

f. Criteriul Bilharz

Fig.VII.11



$$N(A)G(j\check{S}) + 1 = 0, A > 0, \check{S} > 0.$$

$$j\check{S} \rightarrow s \Rightarrow N(A)G(s) + 1 = 0, \quad G(s) = \frac{kz(s)}{p(s)},$$

$$N(A) \frac{kz(s)}{p(s)} + 1 = 0, \quad \frac{kz(s)N(A) + p(s)}{p(s)} = 0.$$

Ecuația caracteristic :

$$\Rightarrow p_0(s, A) = kz(s)N(A) + p(s) = 0. \quad (1.59)$$

Regula 6

PE $Uy=Uv=Uu=0$ al SAN din fig.VII.11 este global asimptotic stabil dac $p_0(s, A)$ este hurwitzian pentru toți $A \geq 0$. ■

$N(A)$ în (1.59) este complex . $p_0(s, A)$ este complex.

Fie polinomul:

$$\Delta(s) = s^n + (a_{R_1} + ja_{I_1})s^{n-1} + (a_{R_2} + ja_{I_2})s^{n-2} + \dots + (a_{R_n} + ja_{I_n}), \quad (1.60)$$

$$a_{R_i}, a_{I_i} \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}.$$

Se definește matricea Bilharz de ordinul $2n$:

$$\mathbf{B}_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{I_1} & -a_{R_2} & -a_{I_3} & a_{R_4} & a_{I_5} & -a_{R_6} & -a_{I_7} & \dots \\ 0 & a_{R_1} & a_{I_2} & -a_{R_3} & -a_{I_4} & a_{R_5} & a_{I_6} & -a_{R_7} & \dots \\ 0 & 1 & a_{I_1} & -a_{R_2} & -a_{I_3} & a_{R_4} & a_{I_5} & -a_{R_6} & \dots \\ 0 & 0 & a_{R_1} & a_{I_2} & -a_{R_3} & -a_{I_4} & a_{R_5} & a_{I_6} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_{I_1} & -a_{R_2} & -a_{I_3} & a_{R_4} & a_{I_5} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{R_1} & a_{I_2} & -a_{R_3} & -a_{I_4} & a_{R_5} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$(a_{R_i} = a_{I_i} = 0 \text{ pt. } i > n).$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

11

Teorema 4 (Bilharz)

Polinomul (1.60) este hurwitzian $\Leftrightarrow \det \mathbf{B}_{2k} > 0, k = \overline{1, n}$. ■

Exemplul 1.11

SAN de poziționare cu regulator de tip releu tripozitional cu histerzis

cu $G(s) = 1/[s(s+1)]$. Să se det. a, b, q pt. care PE este global as. stab.

SAN are zona de echilibru $|Uu| < a$.

Polul $s = 0$ din $G(s)$ realizează $Uy = Uv = Uu = 0$.

Svm. este în repaus în zona de echil. (PE unic).

Funcția de descriere este

$$N(A) = \frac{2ab}{fA^2} \left(\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2} \right) - j \frac{2ab}{fA^2} (1-q), \quad A \geq a.$$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

12

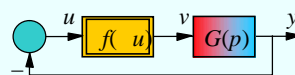


Fig.VII.11

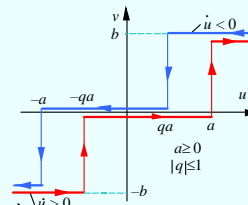


Fig.VII.1

Func ia de descriere:

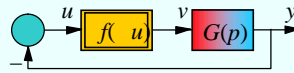


Fig.VII.11

$$N(A) = r - js,$$

$$r = \frac{2ab}{fA^2} \left[\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2} \right], \quad A \geq a; \quad s = \frac{2ab}{fA^2} (1 - q).$$

Func ia de transfer:

$$G(s) = \frac{kz(s)}{p(s)} = \frac{1}{s(s+1)}, \quad kz(s) = 1, \quad p(s) = s(s+1).$$

Ecua ia caracteristic :

$$p_0(s, A) = kz(s)N(A) + p(s) = s(s+1) + r - js = s^2 + s + r - js.$$

Matricea Bilharz:
$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 & -s \end{bmatrix}.$$

M. Voicu, IA (VII)

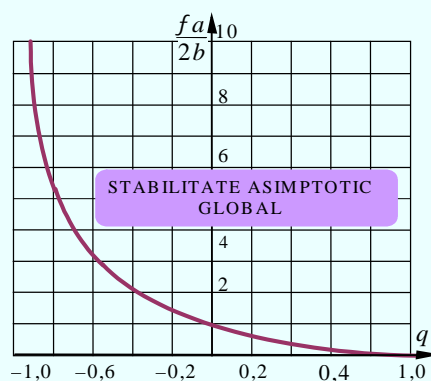
13

Cf. (1.62): $\det \mathbf{B}_2 = 1$, $\det \mathbf{B}_4 = r - s^2 > 0$.

Rezult : $\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2} > 2ab(1-q)^2/(fA^2)$.

Membrul stang, func ie de A, este monoton cresc tor.

Membrul drept, func ie de A, este monoton descresc tor.



Inegalitatea are loc pt. orice

$$A \geq a$$

are loc pentru

$$A = a.$$

Deci (fig. VII.21):

$$a > 2b(1-q)\sqrt{(1-q)/(1+q)}/f,$$

$$|q| \neq 1. \quad \blacksquare$$

Fig.VII.21

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

14

1.4. Problema stabilizării

a. Posibilități de stabilizare

Stabilizare – cf. reg. 5: $G(j\check{S})$ se deplasează la dreapta și/sau $N_c(A)$ se deplasează la stânga.

Se introduc elemente de corecție în serie, liniare și/sau neliniare.

Alte soluții – fig.VII.22: $N_c(A)$ – el. corecție neliniară

$G_{c1}(p)$, $G_{c2}(p)$ – el. corecție liniare.

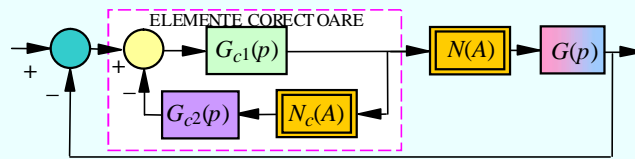


Fig.VII.22

Ec. balanței armonice are forma:

$$G_{c1}(j\check{S})G_{c2}(j\check{S})N_c(A) + G_{c1}(j\check{S})G(j\check{S})N(A) + 1 = 0.$$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

15

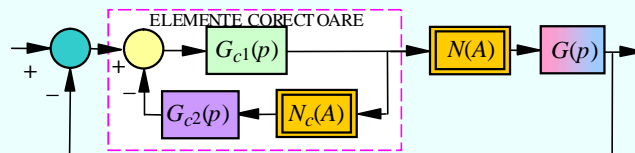


Fig.VII.22

$$G_{c1}(j\check{S})G_{c2}(j\check{S})N_c(A) + G_{c1}(j\check{S})G(j\check{S})N(A) + 1 = 0. \quad (1.63)$$

1. Pentru $N_c(A) = N(A)$, din (1.63) rezultă :

$$G_{c1}(j\check{S})[G_{c2}(j\check{S}) + G(j\check{S})]N(A) + 1 = 0,$$

și urmează alegerea adecvată a el. de corecție liniare.

2. Pentru $G_{c2}(j\check{S}) = G(j\check{S})$, din (1.63) se obține:

$$G_{c1}(j\check{S})G_{c2}(j\check{S})[N_c(A) + N(A)] + 1 = 0,$$

și urmează alegerea unei neliniarități adecvate.

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

16

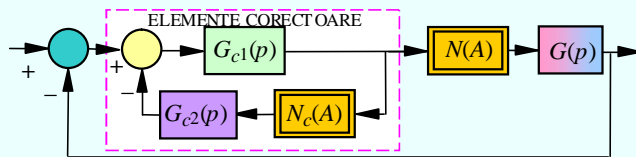


Fig.VII.22

$$G_{c1}(j\check{S})G_{c2}(j\check{S})N_c(A) + G_{c1}(j\check{S})G(j\check{S})N(A) + 1 = 0. \quad (1.63)$$

3. În fine, pentru $N_c(A) = 1 - N(A)$, $G_{c2}(j\check{S}) = G(j\check{S})$,

din (1.63) rezultă : $G_{c1}(j\check{S})G_{c2}(j\check{S}) + 1 = 0$,

fapt echivalent cu compensarea lui $N(A)$ și transformarea sistemului într-un sistem automat liniar.

Determinarea neliniarității coresp. funcției $1 - N(A)$ se face cu ajutorul formulei de inversiune de la 1.1.1.b.

2. Stabilitatea absolut

Sunt utile condițiile de stabilitate asimptotic globală pt. o clasă de neliniarități. Pt. SAN din fig.VII.25, echiv. cu fig.VII.11, Se are în vedere clasa de neliniarități cf. fig. VII. 26.

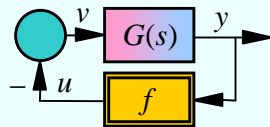


Fig.VII.25

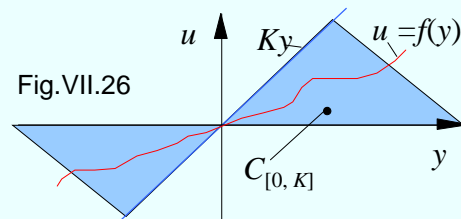


Fig.VII.26

$$C_{[0, K]} = \{f \in \bar{C}^0; 0 \leq f(y)/y \leq K, y \in \mathbf{R}, y \neq 0\}, \quad (2.1)$$

\bar{C}^0 - mulimea funcțiilor scalare, continue pe porțiuni, fig.VII.26.

Similar se definesc și $C_{[v, K]}$, $v > 0$ arbitrar de mic, $C_{(0, K)}$ și $C_{(0, +\infty)}$.

Definiția 1

SAN cf. fig.VII.25 se numește **absolut stabil** dac PE $y=0$ este glob. asimpt. stab. pt. orice $f \in C_{[0,K]} (C_{[v,K]}, C_{(0,K)}, C_{(0,+\infty)})$. ■

2.2. Criteriul Popov

Fie SAN cf. fig.VII.25

$$u = f(y) \quad (2.4) \quad G(s) = \frac{1}{s^r} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1}, \quad (2.5)$$

a_i, b_j sunt numere reale, $r = 0, 1, 2, \dots$ și $n + r > m$.

Coef. de amplif. = 1; factorul de amplif. al buclei inclus în (2.4).

$G(s)$ este ireductibil. Dpdv al polilor lui $G(s)$ se disting:

a) Cazul principal: toți polii lui $G(s)$ sunt în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$;

\emptyset $r = 0$ și $a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$ hurwitzian.

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

19

b) Cazul critic: cel puțin un pol al lui $G(s)$ este pe $\{\operatorname{Re} s = 0\}$, iar restul polilor sunt în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$.

Acestă distincție are originea în definiția clasei $C_{[0,K]}$.

Dacă sectorul este $[0, K]$, atunci este posibil $f(y) \equiv 0$,

funcționalitatea fiind asigurată numai de partea liniară.

În cazul critic partea liniară nu poate fi global asimptotic stabil deoarece, cf. (2.3), $G(s)$ are poli în $\{\operatorname{Re} s = 0\}$.

Urmare: în cazul critic în $C_{[0,K]}$ nu se pune problema stab. abs.

Aici se are în vedere clasa $C_{[v,K]}$, cu $v > 0$ arbitrar de mic.

Aceasta implică în mod necesar asigurarea stab. asimptotice

globale pentru: $f(y) = v y$ (2.6)

(reacție liniară), cu $v > 0$ oricât de mic.

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

20

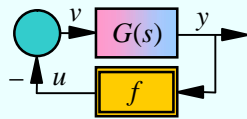


Fig.VII.25

Defini ia 2

SAN din fig.VII.25, cu $G(s)$ în cazul critic i

$$f(y) = \nu y \quad (2.6)$$

(fig.VII.27), se nume te **ν - stabil**

dac punctul de echilibru $y = 0$ este global asimptotic stabil pentru $\nu > 0$ arbitrar de mic. ■

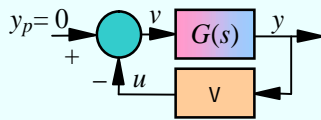


Fig.VII.27

Teorema 2

SAN cf. fig.VII.25, cu $G(s)$ ireductibil ,este ν - stabil \Leftrightarrow SA cf. fig.VII.27 este BIBO-stabil pentru $\nu > 0$ arbitrar de mic. ■

Fie SAN

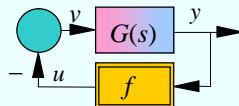


Fig.VII.25

$$G(s) = \frac{1}{s^r} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} \quad (2.5)$$

Teorema 3 (Popov)

Fie SAN cf. fig.VII.25, $G(s)$ de forma (2.5), $f \in C_{[0,K]}$ - în cazul principal ($0 < K \leq +\infty$), sau $f \in C_{[\nu,K]}$ în cazul critic (sist. ν - stabil)

i $0 < K < +\infty$. Atunci SAN este abs. stabil dac exist $q \in \mathbf{R}$ astfel încât :

$$\text{Re}[(1 + jq\check{S})G(j\check{S})] > -1/K, \quad \check{S} \geq 0. \quad \blacksquare \quad (2.7)$$

Teorema 4

Fie SAN cf. fig.VII.25, cu $G(s) = \frac{1}{s^r} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1}$, $r = 1$,

$a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$ hurwitzian i $f \in C_{(0,+\infty)}$.

Atunci SAN este abs. stabil dac exist $q \in \mathbf{R}$ astfel ca:

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\check{S})G(j\check{S})] \geq 0, \check{S} \geq 0. \quad \blacksquare \quad (2.8)$$

Exemplul 2.1

Fie SAN cf. fig.VII.25, cu $f \in C_{(0,+\infty)}$ i $G(s) = (b_1 s + 1) / [s(a_1 s + 1)]$,

$a_1 > 0, b_1 > 0$. S se studieze stab. abs.

Cf. (2.8) se poate scrie:

$$(qa_1 b_1 \check{S}^2 + q + b_1 - a_1) / (a_1^2 \check{S}^2 + 1) \geq 0, \check{S} \geq 0. \text{ Pt. } q \geq \max(0, a_1 - b_1)$$

are loc pt. orice $\check{S} \geq 0$. SAN abs. stab. pt. orice $f \in C_{(0,+\infty)}$. \blacksquare

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

23

2.3. Forma grafic a criteriului Popov

Se prelucreaz în membrul stâng al inegalit ii:

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\check{S})G(j\check{S})] > -1/K, \check{S} \geq 0.$$

Pentru $G(j\check{S}) = \operatorname{Re}G(j\check{S}) + j \operatorname{Im}G(j\check{S})$ se ob ine:

$$\underbrace{\operatorname{Re}G(j\check{S})}_{v} - q \underbrace{\check{S} \operatorname{Im}G(j\check{S})}_{w} > -1/K. \quad (2.10)$$

Nota ii: $v = \operatorname{Re}G(j\check{S})$, $w = \check{S} \operatorname{Im}G(j\check{S})$, $\check{S} \geq 0$, (2.11)

$$G_P(j\check{S}) = \operatorname{Re}G(j\check{S}) + j\check{S} \operatorname{Im}G(j\check{S}), \check{S} \geq 0.$$

Hodograful $G_P(j\check{S})$ se nume te **locul Popov**.

Se define te **dreapta Popov**.

$$v - qw + 1/K = 0.$$

Dac (2.10) are loc, atunci, cu (2.11), rezult **condi ia Popov**.

$$v - qw + 1/K > 0.$$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

24

Locul Popov $G_p(j\check{S}) = \text{Re}G(j\check{S}) + j\check{S} \text{Im}G(j\check{S}), \check{S} \geq 0, \quad (2.12)$

Dreapta Popov $v - qw + 1/K = 0 \quad (2.13)$

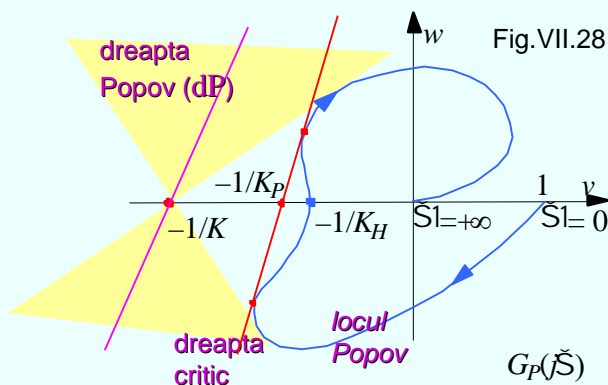
Condi ia Popov $v - qw + 1/K > 0 \quad (2.14)$

Dr. Popov (**dP**) are panta $1/q$ i t ieturile $(-1/K, 0)$ i $(0, 1/Kq)$.

Punctele din pl. (v, w) , situate la dreapta **dP**, satisfac (2.14).

Pt. verificarea grafic a **condi iei Popov** (2.10) :

- ❖ se traseaz în pl. (v, w) locul Popov (cf. (2.12));
- ❖ în $(-1/K, 0)$ se traseaz o **dP** (de pant $1/q$, dac exist) astfel încât locul Popov s r mân în întregime la dreapta acesteia, fig.VII.28;
- ❖ cf. t. 3 SAN este absolut stabil.



$(-1/K, 0)$ fiind dat, pot exista o infinitate de **dP** pentru care **locul Popov** r mâne la dreapta.

Se determin K_p maxim, cu **dP** tangent la **locul Popov**, fig.VII.28; **dreapta critic** , pt. care (2.10) nu are loc.

Sectorul $[0, K_p)$ sau $[v, K_p)$ se nume te **sectorul Popov**.

În cazul critic, sectorul poate fi i $[v, K_p]$, dar numai dac

locul Popov nu trece prin $(-1/K_p, 0)$.

Exemplul 2.2. Fie SAN cu $f \in C_{[v, 1, 5]}$, $G(s) = 1/[s(s^2 + s + 2)]$.

Cf. (2.11), (2.12) locul Popov este descris de ecuațiile:

$$v = -1/[(\check{S}^2 - 2)^2 + \check{S}^2], w = (\check{S}^2 - 2)/[(\check{S}^2 - 2)^2 + \check{S}^2], \check{S} \geq 0.$$

Cu $\check{S}^2 = 2 - w/v$ se obține: $2v^2 + w^2 - vw + v = 0$ (fig.VII.29).

Prin $(-2/3, 0)$ - o infinitate **dP**. Sist. este v -st.; cf. t. 3, abs. stabil.

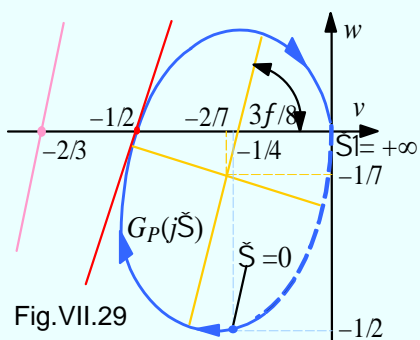


Fig.VII.29

M. Voicu, IA (VII)

Sectorul Popov: $[v, 2)$, fig.VII.29. ■

Dacă nu există o **dP** astfel încât locul Popov să rămână la dreapta, atunci t. 3 nu se aplică.

Nu implică faptul că sist. aut. nu poate fi absolut stabil

(t. 3 - o cond. suficient).

C 14 (33)

27

2.6. Compensarea serie a părții liniare

Dacă nu există o **dP**, atunci se poate proceda astfel:

- Se reduce K (fig.VII.26), \hat{u} se deplasează în punctul $(-1/K, 0)$ - fig.VII.28 - spre stânga pt. a se putea trasa o **dP**; Def.1 sugerează determinarea valorii maxime a lui K .
- Se compensează partea liniară $G(s)$ (fig.VII.25) cu elemente «serie», «paralel» sau «cu reacție», respectiv se deformează și se deplasează locul Popov (fig.VII.28) pt. a se putea trasa o **dP**.

Uzual este compensarea serie a lui $G(s)$ cf. fig.VII.30.

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

28

Compensatorul $G_S(s)$ s ă asigure:

- satisfacerea criteriului Popov;
- ămbun t irea calit ilor impuse SAN.

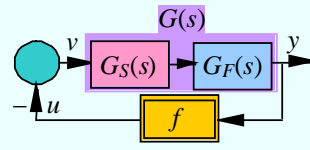


Fig.VII.30

O solu ie simpl , sugerat ă de

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\check{S})G(j\check{S})] > -1/K$$

i de corec ia SA liniare, const ă în utiliz. unui comp. PD:

$$G_S(s) = k_S (s + 1).$$

$G_S(j\check{S})$ rote te antiorar locul Popov cu $0^\circ - 90^\circ$, pt. \check{S} cresc ător.

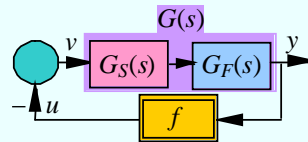
Locul Popov se deplaseaz ă spre dreapta la \check{S} medii i ănalte.

Se poate trasa o dP prin $(-1/K, 0)$ cu condi ia ca acest punct s

r m ăn suficient de departe la st ănga noului loc Popov.

Exemplul 2.4. Fie SAN cf. fig.VII.30

$$G_F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$



Se cere $G_S(s)$ astfel ănc ă SAN s ă fie abs. stabil pt. clasa $C_{(0,4)}$.

1. Pt. $G(s) = G_S(s) G_F(s)$, cu $G_S(s) = k_S$, $k_S > 0$, rezult ă :

$$G(j\check{S}) = \frac{k_S}{j\check{S}(j\check{S}+1)^2} = k_S \frac{-2\check{S} - j(1-\check{S}^2)}{\check{S}[4\check{S}^2 + (1-\check{S}^2)^2]}.$$

Ec. parametrice ale loc. Popov:

$$\begin{cases} v = -\frac{2k_S}{4\check{S}^2 + (1-\check{S}^2)^2}, \\ w = -\frac{k_S(1-\check{S}^2)}{4\check{S}^2 + (1-\check{S}^2)^2}. \end{cases}$$

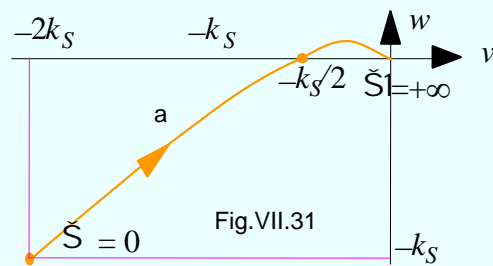
Elimin ănd \check{S}^2 se ob ine locul Popov: $w = v - \sqrt{-k_S v / 2}$, $v < 0$.

$$\begin{cases} v = -\frac{2k_s}{4\check{S}^2 + (1 - \check{S}^2)^2}, \\ w = -\frac{k_s(1 - \check{S}^2)}{4\check{S}^2 + (1 - \check{S}^2)^2}. \end{cases}$$

$$\check{S} = 0 \Rightarrow v = -2k_s, w = -k_s;$$

$$\check{S} = \infty \Rightarrow v = 0, w = 0.$$

Locul Popov: $w = v - \sqrt{-k_s v/2}, v < 0$.



Pt. =1, t ietura cu axa absciselor este:

$$v = -k_s/2, w = 0.$$

Pt. a trasa o dP prin $(-1/4, 0)$ este necesar ca

$$-1/4 < -k_s/2,$$

respectiv

$$k_s < 1/2.$$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

31

2. Pt. $G(s) = G_S(s)G_F(s)$, cu $G_S(s) = k_s(s+1)$, rezult :

$$G(s) = k_s(s+1) \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{k_s}{s(s+1)}.$$

$$G(j\check{S}) = \frac{k_s}{j\check{S}(j\check{S}+1)} = k_s \frac{-\check{S} - j}{\check{S}(\check{S}^2 + 1)}.$$

Ec. parametrice ale loc. Popov:
$$\begin{cases} v = -\frac{k_s}{\check{S}^2 + 1} < 0, \\ w = -\frac{k_s}{\check{S}^2 + 1} < 0. \end{cases}$$

Eliminând $\check{S}^2 + 1 \rightarrow$ locul Popov, fig.VII.31.b :

$$w = v, v < 0.$$

M. Voicu, IA (VII)

C 14 (33)

32

$$\begin{cases} v = -\frac{k_S}{\tilde{S}^2 + 1} < 0, \\ w = -\frac{k_S}{\tilde{S}^2 + 1} < 0. \end{cases}$$

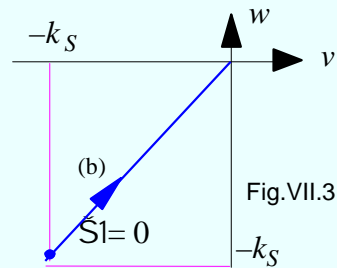


Fig.VII.31

Locul Popov (fig.VII.31.b) : $w = v$, pentru $v < 0$.

Pt. = , t ietura cu axa absciselor este:

$$v = 0, w = 0.$$

Cf. t. 4 se poate trasa o dP de pant $1/q \leq 1$

în orice punct $(v, 0)$ cu $v < 0$.

Sistemul automat este absolut stabil

pt. clasa $C_{(0,+\infty)}$ i $k_S > 0$. ■