c) **Elementul de întârziere de ordinul 2** (T_2)

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.$$

Pentru $s = j\omega$ se obţine răspunsul la frecvenţă:

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2+j2\zeta\omega_n\omega}=\frac{1}{1-\eta^2+j2\zeta\eta},\quad \eta=\frac{\omega}{\omega_n},$$

$$\begin{cases} R(\omega)=\dfrac{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}=\dfrac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2} \\[2ex] I(\omega)=\dfrac{-2\zeta\omega_n^3\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}=\dfrac{-2\zeta\eta}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}. \end{cases}$$

Locul de transfer

$$\begin{cases} R(\omega)=\dfrac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2} \\[2ex] I(\omega)=\dfrac{-2\zeta\eta}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}. \end{cases}$$

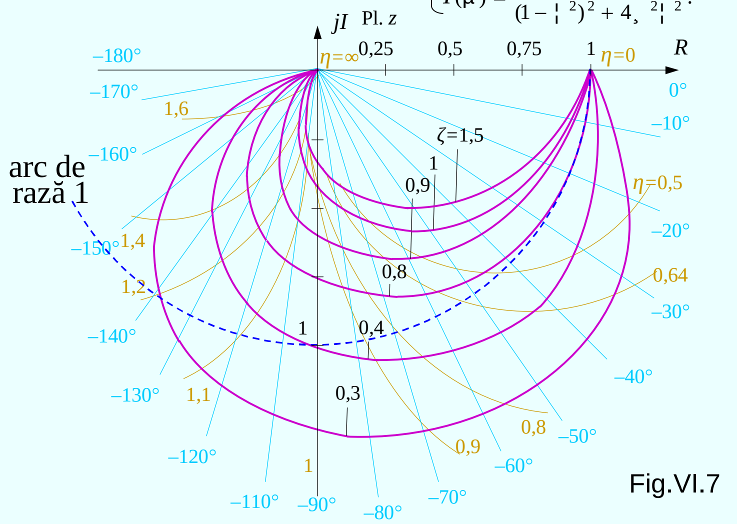


Fig.VI.7

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2+j2\zeta\omega_n\omega}=\frac{1}{1-\eta^2+j2\zeta\eta},\quad \eta=\frac{\omega}{\omega_n},$$

$$\begin{cases} M(\omega)=|G(j\omega)|=\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \\ \varphi(\omega)=\arg G(j\omega)=-\operatorname{arctg}\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}=-\operatorname{arctg}\dfrac{2\zeta\eta}{1-\eta^2}. \end{cases}$$

Diagrama Bode

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega)=20\lg M(\omega)=20\lg\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}=20\lg\dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \\ \varphi(\omega)=-\operatorname{arctg}\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}=-\operatorname{arctg}\dfrac{2\zeta\eta}{1-\eta^2}. \end{cases}$$

Diagrama Bode

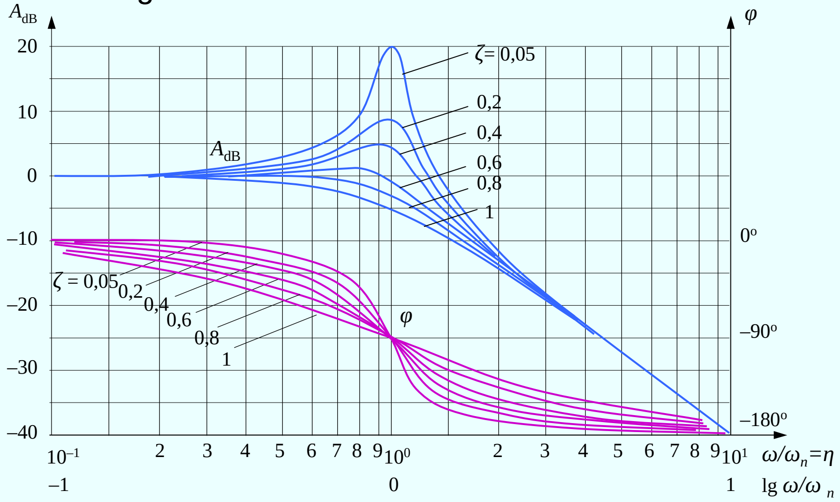


Fig.VI.8

Pentru $0 \le \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{dA_{dB}}{d\eta} = 0 \rightarrow A_{dB\max} = 20\lg\left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1}$,

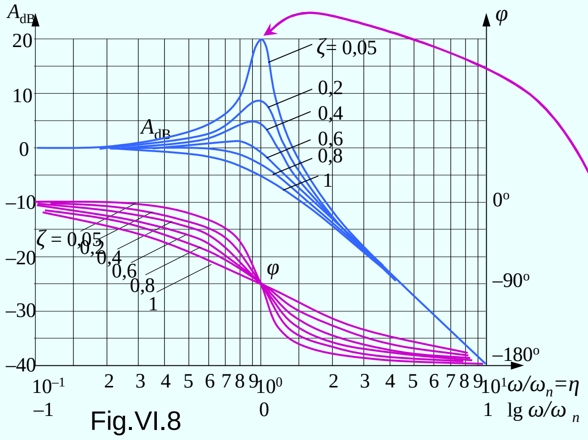


Fig.VI.8

la pulsaţia:

$\eta_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$,

$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} < \omega_n$.

•***Rezonanţa***

Intrarea are amplitud. 1 (0dB), iar ieşirea are amplitudinea:

$M_{\max}(\omega) = \left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1} > 1$ sau $A_{dB\max} = 20\lg\left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1} > 0$.

$A_{dB}(\omega) = -20\lg\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}$. (2.16)

Pentru $0 \le \zeta < 1/\sqrt{2}$ există ***banda de rezonanţă*** $(0, \sqrt{2}\eta_r)$ sau $(0, \omega_n\sqrt{2(1-2\zeta^2)})$ pt. care $A_{dB}(\omega) > 0$.

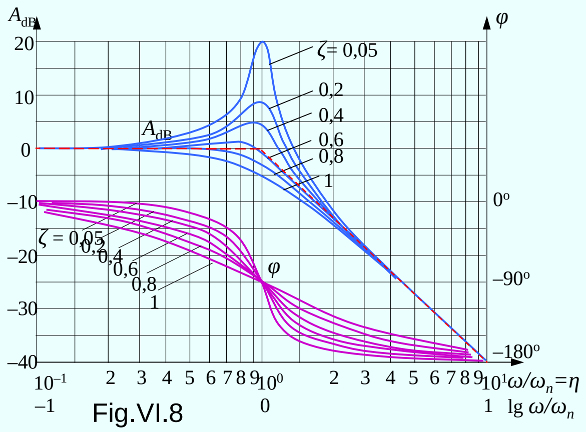


Fig.VI.8

$A_{dB}(\omega)$ are două ***asimptote***.

Pentru $\zeta \in [0{,}4\,,\ 0{,}8]$, din (2.16) rezultă:

$$A_{dB}(\omega) \cong \begin{cases} 0, & 0 \le \eta << 1, \\ -40\lg\eta, & 1 << \eta < +\infty. \end{cases}$$

Pulsaţia de ***frângere***: $\eta = 1$ ($\omega = \omega_n$), $\lg\eta = 0$.

Elementul T_2 este un «filtru trece-jos» (FTJ)

$\eta \in[0, 1]$ (µ∈[0,µ$_n$]) – ***banda de trecere*** a FTJ.

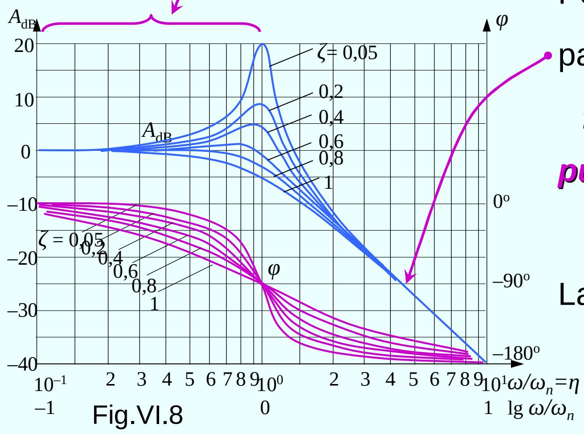


Fig.VI.8

Pentru ¦ > 1 (µ >µ$_n$).

panta este **– 40 dB/dec**.

η = 1 (µ = µ$_n$) este

pulsaţia de tăiere a FTJ

(= puls. de frângere).

La ***pulsaţia naturală***

(¦ = 1 µ = µ$_n$)

¨ (µ$_n$) = –90°.

d) **Elementul integrator** (I): $G_I(s)=\dfrac{1}{T_I s}$.

Răspunsul la frecvenţă: $G_I(j\mu)=\dfrac{1}{jT_I\mu}=\dfrac{1}{j¦}$, ¦ $=T_I\mu$,

Locul de transfer: $R(\mu)=0,\ I(\mu)=-\dfrac{1}{T_I\mu}=-\dfrac{1}{¦}$,

Diagrama Bode: $A_{dB}(\mu)=-20\lg ¦$, ¨ $(\mu)=-90^0$.

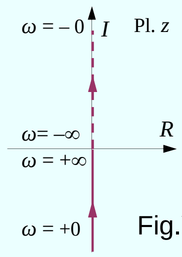


Fig.VI.9

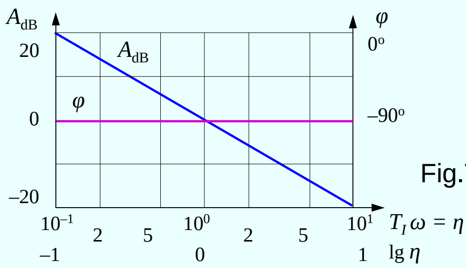


Fig.VI.10

e) **Elementul derivator** (D): $G_D(s) = T_D s.$

Răspunsul la frecvenţă: $G_D(j\mu) = jT_D\mu = j¦,\ ¦ = T_D\mu,$

Locul de transfer: $R(\mu) = 0,\ I(\mu) = T_D\mu = ¦,$

Diagrama Bode: $A_{dB} = 20\lg T_D\mu = 20\lg ¦,\ ¨(\mu) = 90°.$

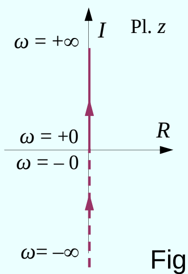


Fig.VI.11

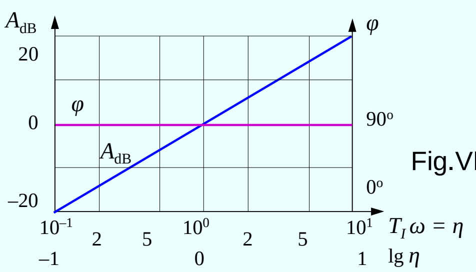


Fig.VI.12

2.4. Trasarea diagramei Bode prin linii aproximante

$\lg|G(j\mu)|$ şi $¨(\mu)$ pot fi aproximate grafic prin linii frânte.

Exempul 2.1

Să se traseze diagrama Bode pentru $G(s) = \frac{10}{s}\cdot\frac{0{,}1s+1}{10s+1}.$

$$s = j\mu \ \Rightarrow\ G(j\mu) = \frac{10}{j\mu}\cdot\frac{1+j0{,}1\mu}{1+j10\mu},$$

$$|G(j\mu)| = \frac{10}{\mu}\cdot\frac{\sqrt{1+(0{,}1\mu)^2}}{\sqrt{1+(10\mu)^2}},\ \arg G(j\mu) = -90° + \mathrm{arctg}(0{,}1\mu) - \mathrm{arctg}(10\mu).$$

$$\begin{cases} A_{dB}(\mu) = 20\lg 10 - 20\lg\mu + 20\lg\sqrt{1+(0{,}1\mu)^2} - 20\lg\sqrt{1+(10\mu)^2} \\ ¨(\mu) = -90^0 + \mathrm{arctg}0{,}1\mu - \mathrm{arctg}10\mu. \end{cases}$$

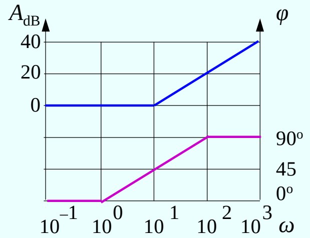
$$\begin{cases} A_{dB}(\mu)=20\lg 10-20\lg\mu+20\lg\sqrt{1+(0{,}1\mu)^2}-20\lg\sqrt{1+(10\mu)^2} \\ \varphi(\mu)=-90^0+\mathrm{arctg}\,0{,}1\mu-\mathrm{arctg}\,10\mu. \end{cases}$$

$$20\lg\sqrt{1+(0{,}1\mu)^2}\cong\begin{cases} 0, & \mu \ll 10^1, \\ 20\lg(0{,}1\mu), & \mu \gg 10^1; \end{cases}$$

$$\mathrm{arctg}(0{,}1\mu)\cong\begin{cases} 0, & \mu<10^o, \\ 45^o[\lg(0{,}1\mu)+1], & 10^o\le\mu\le 10^2, \\ 90^o, & 10^2<\mu. \end{cases}$$

$$-20\lg\sqrt{1+(10\mu)^2}\cong\begin{cases} 0, & \mu \ll 10^{-1}, \\ -20\lg(10\mu), & \mu \gg 10^{-1}; \end{cases}$$

$$-\mathrm{arctg}(10\mu)\cong\begin{cases} 0, & \mu<10^{-2}, \\ -45^o[\lg(10\mu)+1], & 10^{-2}\le\mu\le 10^0, \\ -90^o, & 10^0<\mu. \end{cases}$$



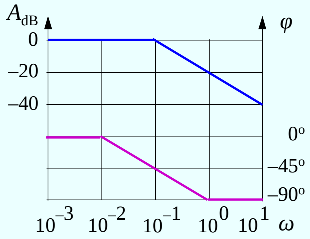
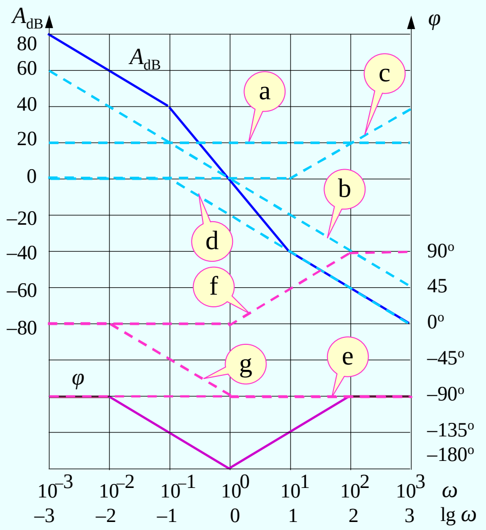


Diagrama Bode



$$\begin{cases} A_{dB}(\mu)=\underbrace{20\lg 10}_{a}\underbrace{-20\lg\mu}_{b}+ \\ +\underbrace{20\lg\sqrt{1+(0{,}1\mu)^2}}_{c}- \\ \underbrace{-20\lg\sqrt{1+(10\mu)^2}}_{d} \\ \varphi(\mu)=\underbrace{-90^0}_{e}+ \\ +\underbrace{\mathrm{arctg}\,0{,}1\mu}_{f}- \\ \underbrace{-\mathrm{arctg}\,10\mu.}_{g} \end{cases}$$

■

Fig.VI.13

3. Principiul non-anticipării

3.1. Filtre ideale

$G(j\omega)$ nu satisface principiul non-anticipării.

De exemplu $G(j\omega) = 0$ pe anumite intervale ale lui ω.

Conform definiţiei răspunsului la frecvenţă se scrie:

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg G(j\omega).$$

Răspunsul la frecvenţă $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ satisface:

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)} = R(\omega) - jI(\omega),$$

$$R(-\omega) = R(\omega), I(-\omega) = -I(\omega),$$

$$M(-\omega) = M(\omega), \ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

a. Elementul cu timp mort

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (3.1)$$

Definiţia 1

Sistemul dinamic (3.1) are o ***comportare ideală*** dacă:

$$M(\omega) = M_0 = \text{const.} > 0, \qquad (3.6)$$

$$\varphi(\omega) = -T\omega, \ T = \text{const.} \geq 0. \qquad (3.7)$$

Abaterile faţă de (3.6) şi/sau (3.7) reprezintă ***distorsiuni***.■

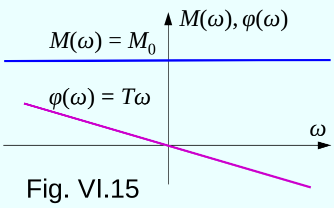


Fig. VI.15

Din (3.1) şi (3.6), (3.7) rezultă:

$$G(j\omega) = M_0 e^{-jT\omega}. \qquad (3.8)$$

Transf. intrare-ieşire:

$$Y(j\omega) = M_0 e^{-jT\omega}U(j\omega), \qquad (3.9)$$

$$y(t) = M_0 u(t - T). \qquad (3.10)$$

$u(t) = \delta(t)$, ⇒ răspunsul la impulsul Dirac :

$$g(t) = M_0 \delta(t - T). \qquad (3.11)$$

$u(t) = \sigma(t)$, ⇒ răspunsul indicial (fig.VI.16) :

$$h(t) = M_0 \sigma(t - T). \qquad (3.12)$$

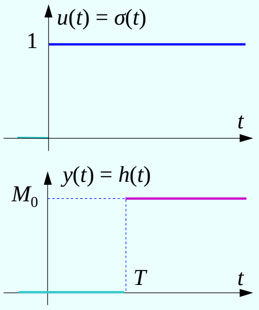


Fig. VI.16

Forma (ideală) (3.12) – un deziderat:

se doreşte ca $y(t)$ să fie ca $u(t)$,

$T \geq 0$ fiind durata propagării lui $u(t)$.

Astfel de elem. există în procesele de:

- transport de substanţă,
- transfer de energie,
- propagare de semnale.

$$y(t) = M_0 u(t - T). \qquad (3.10)$$

Definiţia 2

(3.10) se numeşte ***sistem (element) cu timp mort***. ■

Funcţia de transfer a sistemului (3.10) este:

$G(s) = M_0 e^{-Ts}$; $T \geq 0$ – ***timpul mort***.

b. Filtre ideale fără distorsiuni de fază

Definiţia 3

Un sistem în care:

$$\begin{cases} M(\omega) \neq \text{constant}, \\ \varphi(\omega) = -T\omega, \end{cases} \Rightarrow G(j\omega) = M(\omega) e^{-jT\omega},$$

se numeşte ***filtru ideal fără distorsiuni de fază***. ■

Pentru $M(\mu)$ absolut integrabil există un original

$$m(t) = \mathcal{F}^{-1}\{M(\mu)\}.$$

$M(\mu)$ este reală şi pară; rezultă că şi $m(t)$ este reală şi pară:

$$m(-t) = m(t),$$

$$m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\mu)e^{j\mu t}d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\mu)[\cos\mu t + j\sin\mu t]d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\mu)\cos\mu t d\mu + j\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M(\mu)\sin\mu t d\mu}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} M(\mu)\cos\mu t d\mu .$$

Aplicând t. translaţiei originalului în $G(j\mu) = M(\mu)e^{-jT\mu}$, rezultă

$$g(t) = m(t-T) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} M(\mu)\cos\mu(t-T)d\mu, \quad t \in \mathbf{R}.$$

b1. Filtre ideale «trece-jos»

Definiţia 4

Răspunsul la frecvenţă

$$G(j\mu) = M(\mu)e^{-jT\mu},$$

al unui filtru ideal «trece-jos» (FITJ) se defineşte prin

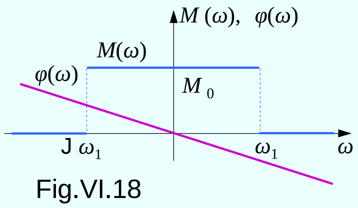


Fig.VI.18

$$M(\mu) = \begin{cases} M_0, & \mu \in [-\mu_1, \mu_1] \\ 0, & \mu \in (-\infty, -\mu_1) \cup (\mu_1, +\infty). \end{cases}$$

$[-\mu_1, \mu_1]$ este *banda de trecere*. μ_1 este *pulsaţia de tăiere*.■

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}M(\mu)\cos\mu(t-T)d\mu=\frac{1}{\pi}M_0\int_0^{\mu_1}\cos\mu(t-T)d\mu,$$

$$g(T)=\frac{1}{\pi}M_0\int_0^{\mu_1}d\mu=\frac{1}{\pi}M_0\mu_1\geq 0,\quad |g(t)|\leq g_{\max}=g(T).$$

$$h(t)=\int_0^t g(t)dt,\ \ h'(t)=g(t),\ \ h'_{\max}=\max_{t>0}h'(t)=h'(T)=g(T).$$

Măsura rapidităţii = panta maximă normată a răsp. indicial:

$$h'_{\max}/M_0=h'(T)/M_0\ =g(T)/M_0=\mu_1/\pi.$$

Rapiditatea este proporţională cu banda de trecere a FITJ.

Rapiditatea este invers proporţională cu durata de creştere t_c.

➷ t_c **este invers proporţională cu banda de trecere a FITJ**.

Aceasta este o regulă generală pentru filtrele «trece-jos».

b2. Filtre ideale «trece-sus»

Definiţia 5

Răspunsul la frecvenţă

$$G(j\mu)=M(\mu)e^{-jT\mu},$$

al unui filtru ideal «trece-sus» (FITS) se defineşte prin

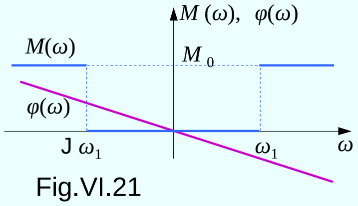


Fig.VI.21

$$M(\mu)=\begin{cases}0, & \mu\in(-\mu_1,\mu_1)\\ M_0, & \mu\in(-\infty,-\mu_1]\cup[\mu_1,+\infty).\end{cases}$$

$(-\mu_1, \mu_1)$ este *banda de blocare*. μ_1 este *pulsaţia de tăiere*.■

b3. Filtre ideale «trece-bandă»

Definiţia 5

Răspunsul la frecvenţă

$$G(j\mu) = M(\mu)e^{-jT\mu},$$

al unui filtru ideal «trece-bandă» (FITB) se defineşte prin (fig.VI.23.a):

$$M(\mu) = \begin{cases} M_0, & \mu \in [-\mu_2, -\mu_1] \cup [\mu_1, \mu_2] \\ 0, & \mu \in (-\infty, -\mu_2) \cup (-\mu_1, \mu_1) \cup (\mu_2, +\infty), \end{cases}$$

$[-\mu_2, -\mu_1]$, $[\mu_1, \mu_2]$ sunt *benzile de trecere*. ■

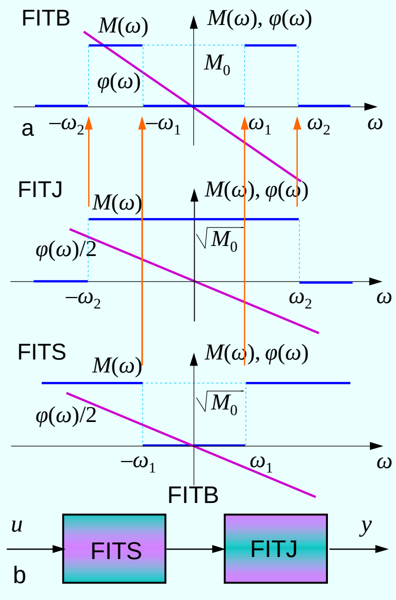


Fig. VI.23. a, b

b4. Filtre ideale «opreşte-bandă»

Definiţia 6

Răspunsul la frecvenţă

$$G(j\mu) = M(\mu)e^{-jT\mu},$$

al unui **filtru ideal «opreşte-bandă»** (FIOB) se defineşte prin (fig. VI.23.c):

$$M(\mu) = \begin{cases} M_0, & \mu \in (-\infty, -\mu_2] \cup [-\mu_1, \mu_1] \cup [\mu_2, +\infty) \\ 0, & \mu \in (-\mu_2, -\mu_1) \cup (\mu_1, \mu_2) \end{cases}.$$

$(-\mu_2, -\mu_1)$, (μ_1, μ_2) sunt ***benzile de blocare***. ■

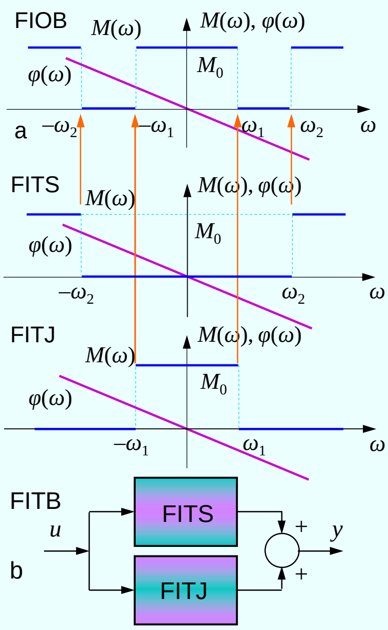


Fig. VI.23. c, d

3.2. Sisteme dinamice realiste

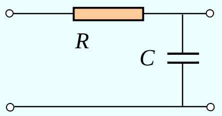
Răspunsul la frecvenţă al filtrelor reale prezintă ***distorsiuni*** de amplitudine şi de fază.

Exemplul 3.2

Cel mai simplu filtru electric «trece-jos» – fig.VI.24.a.

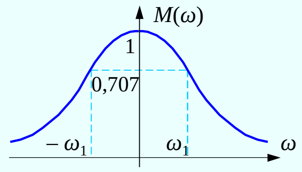
Transferul intrare – ieşire în tensiuni:

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1},\ s=j\mu \to M(\mu)=\frac{1}{\sqrt{T^2\mu^2+1}},\ \mu_1=1/T;\ M(\mu_1)=1/\sqrt{2}=0,707.$$



$T = RC,\ \omega_1 = 1/T$

Fig.VI.24. a



μ_1 este ***pulsaţia de tăiere***, în sensul FTJ real.

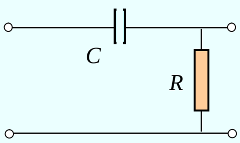
Exemplul 3.3

Cel mai simplu filtru electric «trece-sus» – fig.VI.24.b.

Transferul intrare – ieşire în tensiuni:

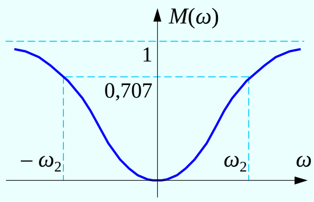
$$G(s)=\frac{Ts}{Ts+1},\ s=j\mu \to M(\mu)=\frac{T\mu}{\sqrt{T^2\mu^2+1}},\ \mu_2=1/T;$$

$$M(\mu_2)=M(\infty)/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}=0,707.$$



$T = RC,\ \omega_2 = 1/T$

Fig.VI.24. b



μ_2 este ***pulsaţia de tăiere***, în sensul FTS real.

Exemplul 3.4

Filtru «trece-bandă»; se conectează în cascadă două filtre: unul «trece-jos» şi unul «trece-sus» – fig.VI.24.c; A – amplif.

$$G(s) = \frac{1}{(T_2 s+1)}\frac{T_1 s}{(T_1 s+1)} = \frac{T_1 s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 > T_2.$$

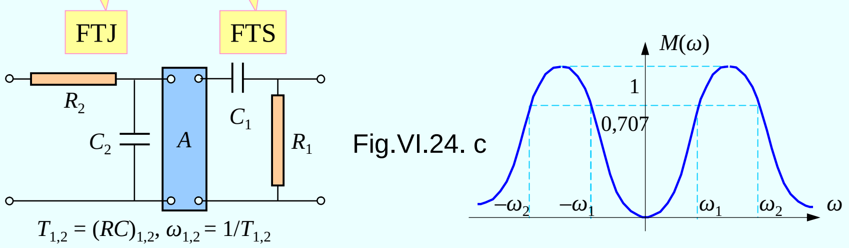


Fig.VI.24. c

$$M(\mu) = \frac{T_1\mu}{\sqrt{(T_1^2\mu^2+1)(T_2^2\mu^2+1)}},\quad \mu_1 < \mu_2.$$

Exemplul 3.5

Filtru «opreşte bandă»: se conectează în paralel a două filtre: unul «trece-jos» şi unul «trece-sus» – fig.VI.24.d; $A_{\text{p=}}$ – amplif.

$$G(s) = \frac{1}{T_1 s+1} + \frac{T_2 s}{T_2 s+1} = \frac{T_1 T_2 s^2 + 2T_2 s + 1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},\quad T_1 > T_2.$$

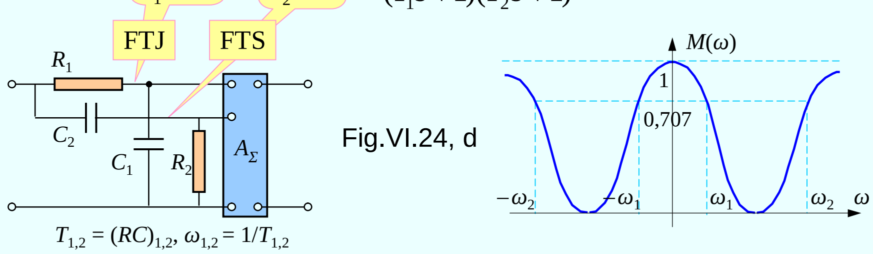


Fig.VI.24, d

$$M(\mu) = \frac{\sqrt{[1-(T_1T_2\mu)^2]^2 + 4T_2^2\mu^2}}{\sqrt{(T_1^2\mu^2+1)(T_2^2\mu^2+1)}},\quad \mu_1 < \mu_2.$$

Observaţia 3.1

Filtrele de la ex. 3.2 – 3.5 au elemente de circuit ideale.

Elementele de circuit reale conţin parametri suplimentari.

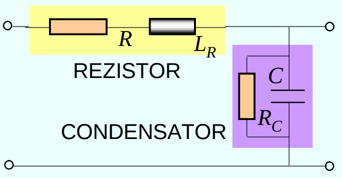


Fig.VI.25

Un rezistor, pe lângă rezistenţa R, are şi inductanţa L_R.

Un condensator, pe lângă capacitatea C, are şi rezistenţa de pierderi R_C.

Prin urmare, un FTJ real are de fapt schema din fig.VI.25.

Dacă $L_R \approx 0$ şi $1/R_C \approx 0$, ele se neglijează, pe intervale de frecvenţă precizabile; rezultă schema din fig.VI.24.a.■

Definiţia 8

Un sistem dinamic (real sau abstract) se numeşte ***realist*** dacă satisface **principiul non-anticipării**:

răspunsul (ieşirea) nu precede în timp excitaţia (intrarea).■

Această proprietate se exprimă cu ajutorul lui $g(t)$ prin:

$$g(t) \equiv 0, \quad t < 0. \qquad \text{(vezi II.3.2.a)}$$

Observaţia 3.2

Sistem realist nu este sinonim cu ***sistem fizic realizabil*** .

Se spune că un sistem abstract este *fizic realizabil* dacă el este concretizabil ca sistem real.

Evident, este posibil ca un sistem abstract *realist* să nu fie *fizic realizabil*.■

Teorema 1

Un sist. din. lin. realist este complet caracterizabil fie de partea pară, fie de partea impară a răspunsului la impuls.■

$\mathscr{D}$. Cu $g_p(t)$, $g_i(t)$, părţile pară şi impară ale lui $g(t)$ se scrie:

$$g(t) = g_p(t) + g_i(t),\ t \in \mathbf{R}.$$

$$g_p(t) + g_i(t) \equiv 0,\ t < 0,$$

$$g_p(-t) + g_i(-t) \equiv 0,\ t > 0.$$

$$g_p(t) - g_i(t) \equiv 0,\ t > 0.$$

$$g_p(t) \equiv g_i(t),\ t > 0.$$

Exemplu

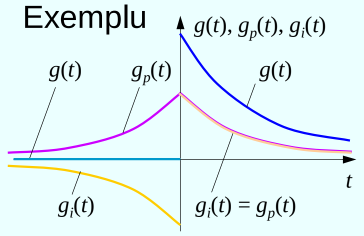


Fig.VI.26

$$g(t) = g_p(t) + g_i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2g_p(t) \equiv 2g_i(t), & t > 0. \end{cases} \quad ■$$

Teorema 2

$g(t)$ al unui sist. dinamic liniar realist este complet determinat fie de partea reală, fie de partea imaginară a lui $G(j\omega)$. ■

$\mathscr{D}$. Pentru $g(t) = g_p(t) + g_i(t)$ şi $G(j\mu) = R(\mu) + jI(\mu) = \mathscr{F}\{g(t)\}$,

se pot scrie relaţiile:

$$G(j\mu) = R(\mu) + jI(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty}[g_p(t) + g_i(t)]e^{-j\mu t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[g_p(t) + g_i(t)][\cos\mu t - j\sin\mu t]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t)\cos\mu t dt - j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t)\sin\mu t dt}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)\cos\mu t dt}_{=0} - j\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)\sin\mu t dt.$$

$$G(j\mu) = R(\mu) + jI(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t)\cos\mu t dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)(-j)\sin\mu t dt.$$

Din

$$R(\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t)(\cos\mu t \quad)dt \; =\int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t)e^{-j\mu t}dt=\mathscr{F}\{g_p(t)\},$$

$$-\,j\sin\mu t$$

$$jI(\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)(\quad -j\sin\mu t)dt \; =\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)e^{-j\mu t}dt=\mathscr{F}\{g_i(t)\},$$

$$+\cos\mu t$$

se obţine:

$$g_p(t)=\mathscr{F}^{-1}\{R(\mu)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu)e^{j\mu t}d\mu\,,$$

$$g_i(t)=\mathscr{F}^{-1}\{jI(\mu)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu)e^{j\mu t}d\mu\,.$$

Folosind

$$g_p(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu)e^{j\mu t}d\mu\,,$$

$$g_i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu)e^{j\mu t}d\mu\,.$$

şi ţinând seama de

$$g(t)=g_p(t)+g_i(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2g_p(t)\equiv 2g_i(t), & t>0.\end{cases}$$

se obţine:

$$g(t)=\begin{cases}0 & ,\; t<0\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu)e^{j\mu t}d\mu\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu)e^{j\mu t}d\mu, & t>0.\end{cases}$$

■

Din $g(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu) e^{j\mu t} d\mu \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu) e^{j\mu t} d\mu, & t > 0, \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu)\underbrace{e^{j\mu t}}_{\cos\omega t + j\sin\omega t} d\mu \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu)\underbrace{e^{j\mu t}}_{\cos\omega t + j\sin\omega t} d\mu, \ t > 0,$$

se obţine $\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu)\cos\mu t d\mu + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} R(\mu) j\sin\mu t d\mu}_{=0} \equiv$

$$\equiv \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu)\cos\mu t d\mu}^{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} jI(\mu) j\sin\mu t d\mu,$$

$$2\int_{0}^{+\infty} R(\mu)\cos\mu t d\mu \equiv -2\int_{0}^{+\infty} I(\mu)\sin\mu t d\mu,$$

$$\int_{0}^{+\infty} [R(\mu)\cos\mu t + I(\mu)\sin\mu t] d\mu = 0, \ t > 0.$$