

3. Efectul unui zero suplimentar

Se consideră funcția de transfer a sist. în circuit deschis:

$$G_d(s) = k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)} (s - z), \quad (3.1)$$

$z \in \mathbf{R}$ este un zero suplimentar.

Cele mai importante efecte ale lui z sunt:

1°. Gradul polinomului polilor SA rămâne n .

Crește cu 1 numărul zerourilor finite și locul rădăcinilor are o ramură care ajunge în $s = z$.

5°. Numărul și poziția punctelor de ramificare depind de z .

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_\beta} + \frac{1}{x - z} = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.3)$$

4°. Pt. $n - m = 1$ nu există ramuri la ∞ .

Pt. $n - m \geq 2$ există $n - m - 1$ ramuri la ∞ .

Centroidul nou este:

$$\begin{aligned} s_{cg}^z &= \frac{1}{n - m - 1} \left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha - z \right) = \\ &= \frac{n - m - 1 + 1}{n - m - 1} \left[\frac{1}{n - m} \left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha \right) - \frac{1}{n - m - 1} z \right] = s_{cg} + \frac{1}{n - m - 1} (s_{cg} - z), \end{aligned}$$

din care :

$$s_{cg}^z - s_{cg} = \frac{1}{n - m - 1} (s_{cg} - z). \quad (3.2)$$

Pt. $z < s_{cg} \Rightarrow s_{cg}^z > s_{cg}$; pt. $z = s_{cg} \Rightarrow s_{cg}^z = s_{cg}$; pt. $z > s_{cg} \Rightarrow s_{cg}^z < s_{cg}$.

z situat la stânga/dreapta lui s_{cg} deplasează locul rădăcinilor la dreapta/stânga lui s_{cg} .

Exemplul 2.6. $G_d(s)=k/[s(s+2)(s+4)] \rightarrow G_d(s)=k(s-z)/[s(s+2)(s+4)]$

$z \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor	$z \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor
Fără zero supl.		$z = -2$	
$z < -4$		$-2 < z < 0$	
$z = -4$		$z = 0$	
$-4 < z < -2$		$z > 0$	

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

3

4. Efectul unui pol suplimentar

Se consideră funcția de transfer a sist. în circuit deschis:

$$G_d(s) = k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta) s - p}, \quad (4.1)$$

$p \in \mathbf{R}$ este polul suplimentar.

Cele mai importante efecte ale lui p sunt:

1°. Gradul polinomului polilor SA crește cu 1.

O ramură nouă pornește din p și numărul de ramuri

la ∞ crește cu 1.

5°. Nr. și poziția punctelor de ramificare depind de p .

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_\beta} - \frac{1}{x - p} = 0, x \in \mathbf{R}. \quad (4.3)$$

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

4

4°. Pt. $n = m$ există o singură ramură (pe axa reală) la ∞ .

Pt. $n - m \geq 1$ există $n - m + 1$ ramuri la ∞ .

Centroidul nou s_{cg}^p este:

$$s_{cg}^p = \frac{1}{n-m+1} \left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha + p \right) =$$

$$= \frac{n-m+1-1}{n-m+1} \left[\frac{1}{n-m} \left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha \right) \right] + \frac{1}{n-m+1} p = s_{cg} + \frac{1}{n-m+1} (p - s_{cg}),$$

din care:

$$s_{cg}^p - s_{cg} = \frac{1}{n-m+1} (p - s_{cg}). \quad (4.2)$$

Pt. $p < s_{cg} \Rightarrow s_{cg}^p < s_{cg}$; pt. $p = s_{cg} \Rightarrow s_{cg}^p = s_{cg}$; pt. $p > s_{cg} \Rightarrow s_{cg}^p > s_{cg}$.

p situat la stânga/dreapta lui s_{cg} deplasează locul rădăcinilor la stânga/dreapta lui s_{cg} .

Exemplul 2.6. $G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)] \Rightarrow G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)(s-p)]$

$p \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor	$p \in \mathbf{R}$	Locul rădăcinilor
Fără pol supl.		$p = -2$	
$p < -4$		$-2 < p < 0$	
$p = -4$		$p = 0$	
$-4 < p < -2$		$p > 0$	

5. Sinteza regulatorului

5.1. Tema de proiectare

Se precizează:

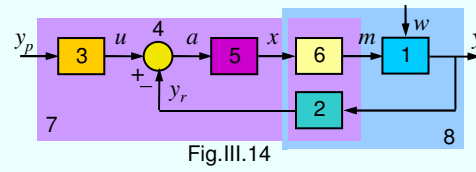


Fig.III.14

- Instalația automatizată cu mărimi de intrare (m – comandă, w – perturbație), y – mărimea de ieșire, fig. III.14.
- Mărimea de ieșire (reglată) trebuie să aibă o evoluție cf. cu o mărime prescrisă (de referință) y_p , fig.III.14.
- Performanțele se exprimă prin indicii de calitate: suprareglarea σ , durata reg. tranzitoriu t_s , durata de creștere t_c (cf. II.7.1) și erorile staționare e_{ps} și e_{ws} în raport cu y_p și respectiv cu w (cf. III.5.2).

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

7

5.2. Rezolvarea temei de proiectare

- Se scriu ecuațiile de funcționare și se stabilește schema bloc structurală a SA.
El. de exec. (6) și traductorul (2) se aleg în funcție de IA (1).
Acestea formează **partea fixată** (8) a SA.
Partea fixată este cunoscută cu precizie acceptabilă.
- Se adoptă un **regulator** (5) cf. t. Aizerman – Gantmaher (v. III.4.2) sau pe baza experienței existente.
- Se determină dom. param. de rezervă de BIBO-stab. pentru parametri încă necunoscuți ai regulatorului.
- Se determină **parametrii și / sau structura regulatorului** pt. realizarea val. admis. ale ind. de calitate ai SA.

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

8

Se realizează o config. cu doi poli dominanți, corelați cu valorile admisibile ale indicilor de calitate: σ_a , t_{sa} și t_{ca} .

De la elem. T2 se cunosc:

- Pt. suprareglare (v. fig.):

$$\sigma = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 \leq \zeta < 1.$$

- Pt. durata adimensională a reg. tranzitoriu (v. fig.):

$$\tau_s \cong 3/\zeta, \quad 0 < \zeta \leq 0,707,$$

$$\tau_s \cong 6\zeta, \quad \zeta > 0,707.$$

- Pt. durata de creștere a regimului tranzitoriu:

$$t_c \cong 1,8/\omega_n, \quad 0,3 \leq \zeta \leq 0,8.$$

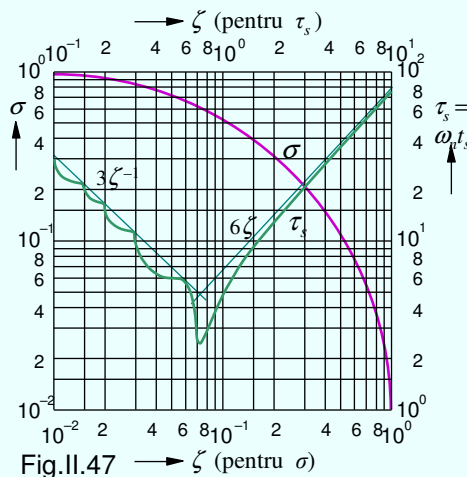


Fig. II.47 $\rightarrow \zeta$ (pentru σ)

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

9

Regulatorul va alocă următorii poli dominanți ai SA:

$$p_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}), \quad 0 < \zeta < 1.$$

σ depinde numai de ζ .

1) Condiția $\sigma \leq \sigma_a \Leftrightarrow \zeta \geq \zeta_a$.

$$\zeta_a = \cos \psi_a = \frac{2,31 \lg \sigma_a}{\sqrt{9,86 + (2,31 \lg \sigma_a)^2}}.$$

Pt. $\zeta = \cos \psi$ (cu $0 < \psi < 90^\circ$),

$$\zeta \geq \zeta_a \Leftrightarrow \psi \leq \psi_a, \text{ fig. V.18.}$$

$$\Rightarrow \psi_0 \leq \psi_a \Rightarrow \zeta_0 = \cos \psi_0.$$

$$\text{Se alege } \psi_0 \approx \psi_a, \Rightarrow \zeta_0 \approx \zeta_a$$

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

10

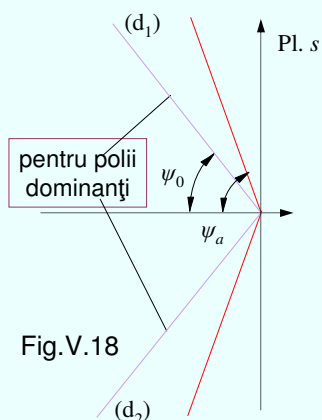


Fig. V.18

2) Condiția $t_s \leq t_{sa}$ se rezolvă cu fig.II.47 sau $\tau_s = \omega_n t_s \cong 3/\zeta$.

Pt. ζ_0 deja ales se determină τ_{s0} din fig.II.47 sau,

pentru $0 < \zeta_0 < 0,707$, cu $\tau_{s0} \cong 3/\zeta_0$.

Durata reală, t_{s0} , trebuie să satisfacă: $t_{s0} = \tau_{s0}/\omega_{n0} \leq t_{sa}$.

Pulsația naturală ω_{n0} trebuie să satisfacă $\omega_{n0} \geq \tau_{s0}/t_{sa}$.

3) Condiția $t_c \leq t_{ca}$ se rezolvă cu $t_c \cong 1,8/\omega_n$, pt. $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$.

Durata reală, t_{c0} , trebuie să satisfacă $t_{c0} \cong 1,8/\omega_{n0} \leq t_{ca}$.

Pulsația naturală ω_{n0} trebuie să satisfacă și $\omega_{n0} \geq 1,8/t_{ca}$.

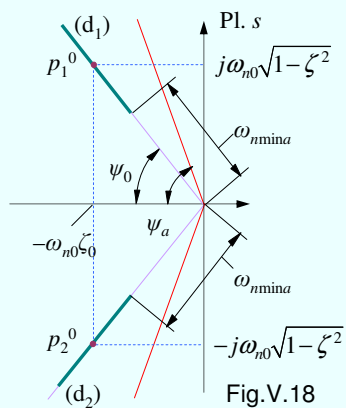


Fig.V.18

Din $\omega_{n0} \geq \tau_{s0}/t_{sa}$, $\omega_{n0} \geq 1,8/t_{ca}$ rezultă:

$$\omega_{n0} \geq \omega_{nmina} \triangleq \max(\tau_{s0}/t_{sa}, 1,8/t_{ca}).$$

Dar $|p_{1,2}| = |\omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})| = \omega_n$.

$\Rightarrow \omega_{nmina}$ este o distanță măsurată pe (d1) și (d2) – fig.V.18.

Se aleg polii dominanți:

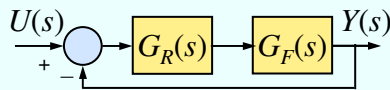
$$p_{1,2}^0 = \omega_{n0}(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1-\zeta_0^2}),$$

plasați pe (d₁), (d₂), în zonele verzi, cu $\omega_{n0} \cong \omega_{nmina}$.

Urmează ca regulatorul, prin zerouri, poli și $k > 0$ adecvat aleși, să asigure ca SA să aibă polii dominanți $p_{1,2}^0$.

Exemplul 5.1. În fig.IV.4:

$$G_F(s) = \frac{12,5}{(s+1)(s+2,5)},$$



$$\sigma_a = 0,17, t_{sa} = 3s, t_{ca} = 1,5s, e_{ps} = 0.$$

Să se determine $G_R(s)$.

Pt. $e_{ps} = 0$ se introduce în regulator o componentă I:

$$G_R(s) = \frac{k_r}{s}, \quad k_r - \text{factor de proporționalitate.}$$

Pt. $\sigma_a = 0,17$, cf. fig. II.47: $\zeta_a \cong 0,5, \psi_a \cong 60^\circ$.

Se adoptă: $\zeta_0 = 0,5$ și $\psi_0 = 60^\circ$.

Din fig. II.47 rezultă: $\tau_{s0} = 6,25$.

$\omega_{h\min a} = \max(\tau_{s0}/t_{sa}, 1,8/t_{ca}) = \max(6,25/3, 1,8/1,5) \cong 2,1 \text{ [sec]}^{-1}$.

Se adoptă $\omega_{no} = 2,2 \text{ [sec]}^{-1}$. Polii dominanți impuși sunt:

$$p_{1,2}^0 = 2,2(-0,5 \pm j0,87).$$

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

13

Funcția de transfer a sistemului în circuit deschis:

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{k_r}{s} \frac{12,5}{(s+1)(s+2,5)} = \frac{k}{s(s+1)(s+2,5)}, \quad k = 12,5k_r.$$

Polii dominanți impuși: $p_{1,2}^0 = 2,2(-0,5 \pm j0,87)$.

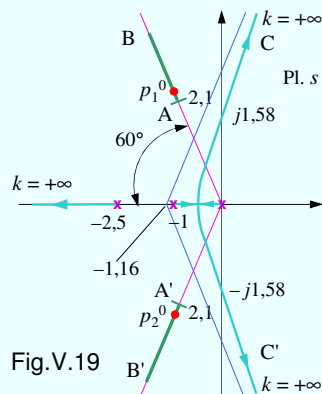


Fig.V.19

M. Voicu, IA (V)

Locul rădăcinilor nu trece prin $p_{1,2}^0$.

Pentru a trece, se introduc în $G_d(s)$ zerouri și/sau poli suplimentari.

Se deplasează loc. răd. la stg., cu același nr. de ram. la ∞ , astfel încât ram. C și C' să se intersecteze cu AB și A'B' în $p_{1,2}^0$.

C 9 (35)

14

↳ Un zero supl. în -1 compensează polul -1 al p. fixate.

↳ Un pol supl. în -20 (îndeprătat) deplas. loc. răd. la stg.

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+20)} \frac{12,5}{(s+1)(s+2,5)} = \frac{k}{s(s+2,5)(s+20)}$$

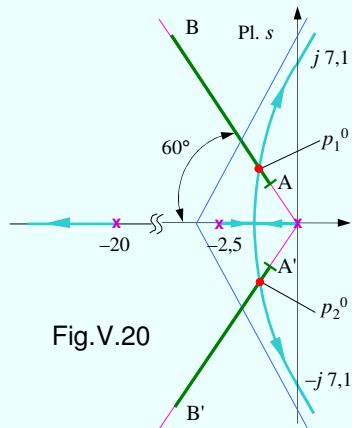


Fig.V.20

M. Voicu, IA (V)

Din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} G_d(s)+1=0 \\ \text{Im } s = -(\text{tg}60^\circ) \text{Re } s \end{cases}$$

rezultă:

$$\text{Re } s = -10/9, \text{Im } s = \sqrt{3} 10/9, |s| \cong 2,2.$$

Loc. răd. intersectează AB și A'B' foarte aproape de polii dominanți impuși $p_{1,2}^0$.

C 9 (35)

15

k se calculează din $1 + G_d(s) = 0$, $|G_d(-10/9 + j10\sqrt{3}/9)| = 1$,

$$k = \left| \frac{-10/9 + j10\sqrt{3}/9}{-10/9 + 2,5 + j10\sqrt{3}/9} \right| \left| \frac{-10/9 + 20 + j10\sqrt{3}/9}{-10/9 + 20 + j10\sqrt{3}/9} \right| = 100.$$

Dar $k = 12,5k_r$, $k_r = 8$.

Funcția de transfer a regulatorului: $G_R(s) = \frac{8(s+1)}{s(s+20)}$.

Funcția de transfer a sistemului automat este:

$$G_0(s) = \frac{100}{s^3 + 22,5s^2 + 50s + 100} = \frac{100}{(s+10/9 - j10\sqrt{3}/9)(s+10/9 + j10\sqrt{3}/9)(s+20,25)}$$

Rezultă că polii

$p_{1,2}^0 = -10/9 \pm j10\sqrt{3}/9$ sunt dominanți și $-20,25$ este îndeprătat. ■

M. Voicu, IA (V)

C 9 (35)

16

Capitolul VI

METODA FRECVENȚIALĂ

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

17

1. Răspunsul la frecvență

1.1. Semnificația funcției $G(j\omega)$

Transferul intrare-ieșire este descris de:

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (1.1)$$

Pentru simplitate, $G(s)$ nu are zerouri / polii în $\pm j\omega_0$.

Se aplică la intrare funcția sinusoidală:

$$u(t) = \sin \omega_0 t, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad U(s) = \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Se cere componenta de regim permanent $y_p(t)$ a ieșirii:

$$Y(s) = G(s) \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (1.3)$$

$Y_p(s)$ conține fracțiile simple ale polilor lui $U(s)$: $s_{1,2} = \pm j\omega_0$.

Se aplică în (1.3) t. dezvoltării numai pentru aceste fracții.

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

18

$$Y_P(s) = \frac{A_1}{s - j\omega_0} + \frac{A_2}{s + j\omega_0}, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \left[(s \mp j\omega_0) G(s) \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right]_{s = \pm j\omega_0} = \left[G(s) \frac{\omega_0}{s \pm j\omega_0} \right]_{s = \pm j\omega_0} = \\ &= \pm \frac{1}{2j} G(\pm j\omega_0) = \pm \frac{1}{2j} [R(\omega_0) \pm jI(\omega_0)]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se introduce (1.6) în (1.4):

$$\begin{aligned} Y_P(s) &= \frac{1}{2j} [R(\omega_0) + jI(\omega_0)] \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{2j} [R(\omega_0) - jI(\omega_0)] \frac{1}{s + j\omega_0} = \\ &= \frac{1}{2j} R(\omega_0) \left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] + \frac{1}{2j} jI(\omega_0) \left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right]. \\ Y_P(s) &= R(\omega_0) \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + I(\omega_0) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

19

$$\mathcal{L}^{-1} Y_P(s) = R(\omega_0) \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + I(\omega_0) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

$$y_P(t) = R(\omega_0) \sin \omega_0 t + I(\omega_0) \cos \omega_0 t = R(\omega_0) \{ \sin \omega_0 t + \operatorname{tg} \varphi \cos \omega_0 t \}.$$

$$y_P(t) = R(\omega_0) \left\{ \sin \omega_0 t + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \omega_0 t \right\} = \frac{R(\omega_0)}{\cos \varphi} \{ \sin \omega_0 t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega_0 t \}.$$

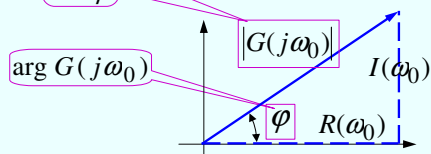
Așadar

$$u(t) = \sin \omega_0 t, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$y_P(t) = |G(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \arg G(j\omega_0)], \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (1.7)$$

$$|G(j\omega_0)| = \sqrt{R^2(\omega_0) + I^2(\omega_0)}, \quad \varphi = \arg G(j\omega_0) = \operatorname{arctg} \frac{I(\omega_0)}{R(\omega_0)}.$$

Amplitudinea = modul lui $G(j\omega_0)$; faza = argumentul lui $G(j\omega_0)$.



M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

20

1.2. Definiții

Definiția 1

$G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, se numește **răspunsul la frecvență** al sistemului descris de funcția de transfer $G(s)$. ■

Răspunsul la frecvență se obține prin calcul / experimental.

Se știe că

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt,$$

în care $g(t)$ este răsp. la impulsul Dirac. Cu $s = j\omega$, se obține:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt.$$

$G(j\omega)$ este **transformata Fourier** a răsp. la impulsul Dirac.

$G(j\omega)$ este o imagine a spectrului de frecvențe din $g(t)$.

Transformata inversă:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$g(t)$ este format din oscilațiile $e^{j\omega t}$ de amplitudine $G(j\omega)$.

Definiția 2

Fie un semnal $f(t)$, $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ se numește **densitatea spectrală** și $|F(j\omega)|$ – **densitatea spectrală de amplitudine**. ■

În cazul transferului intrare – ieșire:

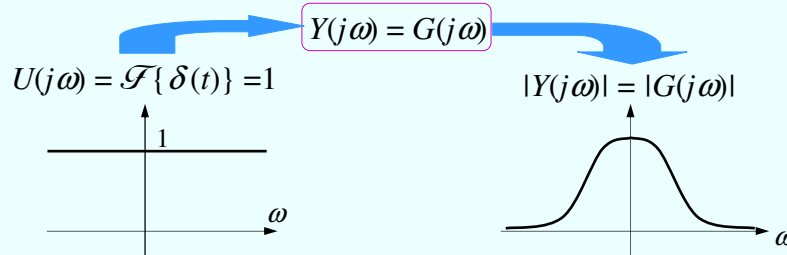
$$Y(s) = G(s)U(s),$$

pentru $s = j\omega$, se obține:

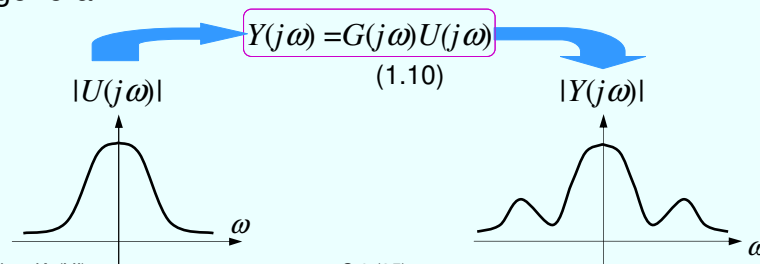
$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega). \quad (1.10)$$

Sistemul se comportă (frecvențial) ca un **filtru**.

De ex., pt. $u(t) = \delta(t)$, $U(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, din (1.10) rezultă:



În general



M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

23

2. Reprezentări grafice ale răspunsului la frecvență

2.1. Locul de transfer

Hodograful $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}$, se numește **locul de transfer**.

Este imaginea axei imaginare, $s = j\omega$, prin $z = G(s)$.

$s = j\omega$ (fig. VI.1 – **conturul Nyquist**) se închide în p. de la ∞ .

$G(j\omega)$ este o curbă închisă, eventual prin p. de la ∞ din pl. z .

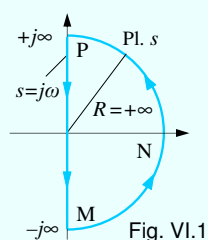


Fig. VI.1

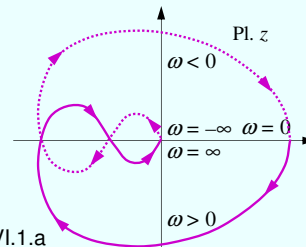
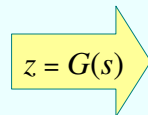


Fig. VI.1.a

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

24

Pentru $s = j\omega$ din $G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$ rezultă

$$G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0},$$

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}.$$

$G(j\omega)$ este simetric față de axa reală a planului z .

$$G(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j \operatorname{Im} G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

se reprezintă:

$$\begin{array}{l} \text{în coordonate carteziene} \\ \text{în coordonate polare} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega), \\ I(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega); \\ M(\omega) = |G(j\omega)|, \\ \varphi(\omega) = \arg G(j\omega). \end{array} \right.$$

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

25

a. Locul de transfer la frecvențe înalte ($\omega \rightarrow +\infty$)

Depinde de gradele m și n .

$$\begin{aligned} G(+j\infty) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(j\omega)^m [b_m + b_{m-1} (j\omega)^{-1} + \dots + b_1 (j\omega)^{-m+1} + b_0 (j\omega)^{-m}]}{(j\omega)^n [a_n + a_{n-1} (j\omega)^{-1} + \dots + a_1 (j\omega)^{-n+1} + a_0 (j\omega)^{-n}]} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b_m (j\omega)^m}{a_n (j\omega)^n} = \frac{b_m}{a_n} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (j\omega)^{m-n} = (j)^{m-n} \frac{b_m}{a_n} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{m-n}, \quad a_n \neq 0. \end{aligned}$$

$$(j)^{m-n} = [e^{j\frac{\pi}{2}}]^{m-n} = e^{j(m-n)\frac{\pi}{2}}.$$

$$G(+j\infty) = \frac{b_m}{a_n} e^{j(m-n)\frac{\pi}{2}} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega^{m-n} = \begin{cases} 0 (a_n^{-1} b_m) e^{j(m-n)\frac{\pi}{2}}, & m < n, \\ a_n^{-1} b_m, & m = n, \\ \infty (a_n^{-1} b_m) e^{j(m-n)\frac{\pi}{2}}, & m > n. \end{cases}$$

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

26

b. Locul de transfer la frecvențe joase ($\omega \downarrow 0$)

Depinde de nr. $z \geq 0$ de zerouri și nr. $p \geq 0$ de poli în $s = 0$.

$$G(+0) = \lim_{\omega \downarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \downarrow 0} \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_z(j\omega)^z}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_p(j\omega)^p} =$$

$$= \lim_{\omega \downarrow 0} \frac{(j\omega)^z [b_m(j\omega)^{m-z} + \dots + b_{z+1}(j\omega) + b_z]}{(j\omega)^p [a_n(j\omega)^{n-p} + \dots + a_{p+1}(j\omega) + a_p]} =$$

$$= \frac{b_z}{a_p} \lim_{\omega \downarrow 0} (j\omega)^{z-p} = (j)^{z-p} \frac{b_z}{a_p} \lim_{\omega \downarrow 0} \omega^{z-p}, \quad a_p \neq 0.$$

$$(j)^{z-p} = [e^{j\frac{\pi}{2}}]^{z-p} = e^{j(z-p)\frac{\pi}{2}}.$$

$$G(+0) = \frac{b_z}{a_p} e^{j(z-p)\frac{\pi}{2}} \lim_{\omega \downarrow 0} \omega^{z-p} = \begin{cases} 0(a_p^{-1} b_z) e^{j(z-p)\frac{\pi}{2}}, & z > p, \\ a_p^{-1} b_z, & z = p, \\ \infty(a_p^{-1} b_z) e^{j(z-p)\frac{\pi}{2}}, & z < p. \end{cases}$$

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

27

Caz particular

Pentru $z - p = -1$, se obține $|\operatorname{Re}G(+0)| < +\infty$, $\operatorname{Im}G(+0) = -\infty$.

Exemplu

$$G(j\omega) = \frac{b_1(j\omega) + b_0}{a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega)} = \frac{b_0 \left[\frac{b_1}{b_0}(j\omega) + 1 \right]}{a_1(j\omega) \left[\frac{a_2}{a_1}(j\omega) + 1 \right]} =$$

$$= \frac{b_0}{a_1} \frac{1 + d_1 j\omega}{j\omega(1 + c_1 j\omega)}, \quad c_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad d_1 = \frac{b_1}{b_0}.$$

Se amplifică fracția cu conjugata numitorului.

$$G(j\omega) = \frac{b_0}{a_1} \frac{(-j)}{j(-j)\omega} \frac{(1 + d_1 j\omega)(1 - c_1 j\omega)}{(1 + c_1 j\omega)(1 - c_1 j\omega)} = \frac{b_0}{a_1} \frac{-j}{\omega} \frac{[1 + (d_1 - c_1)j\omega - c_1 d_1 (j\omega)^2]}{1 + c_1^2 \omega^2}.$$

$$G(+0) = \lim_{\omega \downarrow 0} G(j\omega) = \frac{b_0}{a_1} \lim_{\omega \downarrow 0} \frac{[-j/\omega + (d_1 - c_1) - j c_1 d_1 \omega]}{1 + c_1^2 \omega^2} = \frac{b_0}{a_1} [(d_1 - c_1) - j\infty].$$

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

28

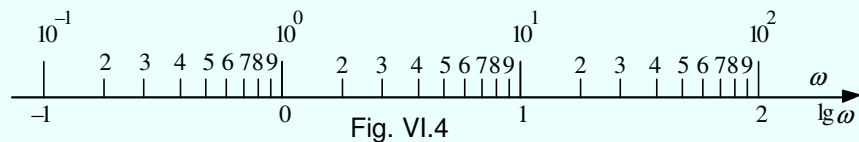
2.2. Diagrama Bode

Aceasta este o reprezentare în coord. carteziene a funcțiilor:

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|, \omega \in \mathbf{R}_+, \quad (2.4)$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega), \omega \in \mathbf{R}_+. \quad (2.5)$$

Se utilizează o scară log. (în baza 10) a pulsației - fig.VI.4.



$A_{dB}(\omega)$ este **atenuarea** răsp. la frecvență (în deciBell [dB]);
 $\varphi(\omega)$ este **faza** răspunsului la frecvență (în grade).

Diagrama Bode permite utilizarea mai simplă a corelațiilor care există sau se dorește să existe între $A_{dB}(\omega)$ și $\varphi(\omega)$.

2.3. Elemente de transfer tipice

a) Elementul proporțional (P): $G(s) = K, G(j\omega) = K.$

Locul de transfer este un punct.

Diagrama Bode: $A_{dB}(\omega) = 20 \lg K, \varphi(\omega) = 0.$

b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T_1):

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}.$$

Pentru $s = j\omega$ se obține răspunsul la frecvență:

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} = \frac{1}{1 + j\eta}, \quad \eta = T\omega, \quad \eta - \text{pulsația normalată.}$$

Din aceasta rezultă modulul și faza:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -\arctg T\omega = -\arctg \eta.$$

Răspunsul la frecvență:

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} = \frac{1}{1 + j\eta}, \quad \eta = T\omega.$$

Din aceasta se obțin:

$$\begin{cases} R(\omega) = \frac{1}{T^2\omega^2 + 1} = \frac{1}{\eta^2 + 1}, \\ I(\omega) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} = -\frac{\eta}{\eta^2 + 1}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Din (2.9) se obține:

$$\eta = -\frac{I(\omega)}{R(\omega)},$$

care se înlocuiește în $R(\omega)$. Rezultă locul de transfer:

$$R^2 + I^2 - R = 0,$$

care este un cerc de raza 0,5 și cu centrul în $(1/2, 0)$, fig.VI.5.

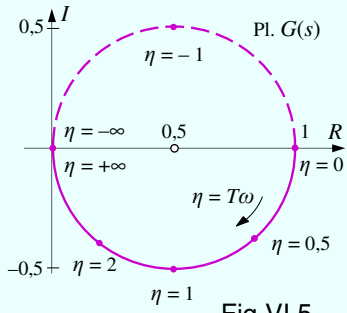


Fig.VI.5

Diagrama Bode

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega = -\arctg \eta.$$

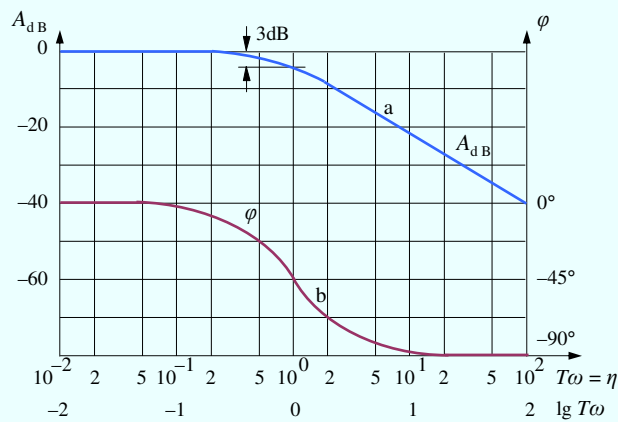


Fig.VI.6

Din

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega = -\arctg \eta,$$

se obțin aproximantele:

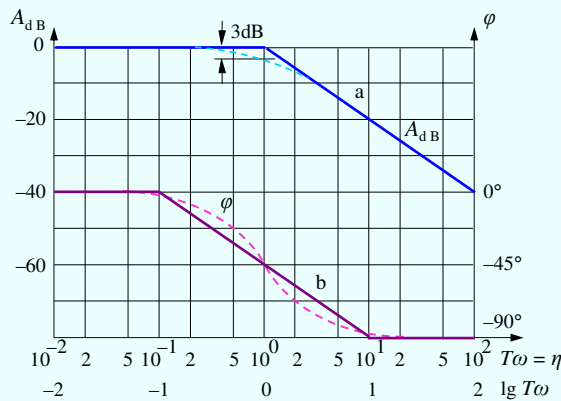


Fig.VI.6

M. Voicu, IA (VI)

C 9 (35)

33

$$A_{dB}(\omega) = -20 \lg \sqrt{\eta^2 + 1} \cong$$

$$\cong \begin{cases} 0, & 0 \leq \eta \ll 1, \\ -20 \lg \eta, & 1 \ll \eta < +\infty. \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg 10^{\lg \eta} \cong$$

$$\cong \begin{cases} 0^\circ, & 0 \leq \eta \ll 0,1, \\ -45^\circ (\lg \eta + 1), & 0,1 < \eta < 10, \\ -90^\circ, & 10 \ll \eta < +\infty. \end{cases}$$

$A_{dB}(\omega)$ are 2 asimptote:

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega) = 0, \\ A_{dB}(\omega) = -20 \lg \eta, \text{ fig. VI.6.a.} \end{cases}$$

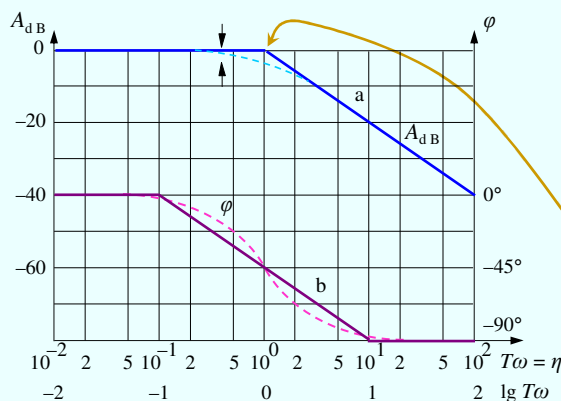


Fig.VI.6

Asimptotele se

intersectează la

$$\eta = 1 \quad (\omega = 1/T).$$

Aceasta este numită

pulsația de frângere.

$\varphi(\omega)$ se aproximează

prin 3 segmente de

dreaptă, fig. VI.6.b.

La pulsația de frângere: $\varphi(1/T) = -45^\circ$.

M. Voicu, IA (VI)

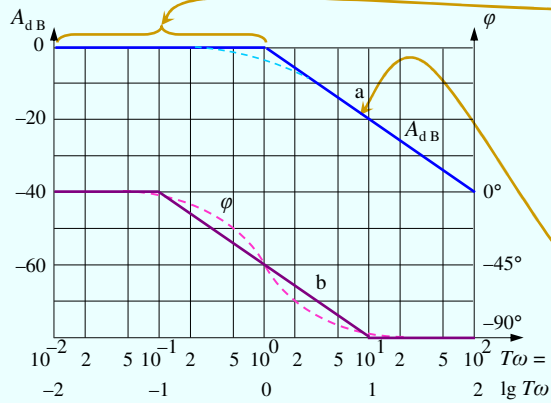
C 9 (35)

34

Elementul T_1 este un filtru «trece - jos» (FTJ), fig. VI.6.

$\eta = 1$ ($\omega = 1/T$) este **pulsația de tăiere** a FTJ.

Banda de trecere a FTJ este intervalul $0 \leq \eta \leq 1$ ($\omega < 1/T$).



Panta FTJ la frecvențe înalte, respectiv pentru $\eta > 1$ ($\omega > 1/T$), este: **- 20 dB/dec.**

Fig.VI.6